MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 4 :

1. Dokažte užitím definice limity posloupnosti (a důkaz podrobně napište) :

   a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$.

   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

2. Dokažte, že platí (důkaz opět sepište podrobně) :

   $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a posloupnost $\{b_n\}$ je omezená $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n.b_n = 0$.

   (a odtud lze pak jednoduše určit např. limitu $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sin n$).

3. Rozhodněte, zda platí následující tvrzení (a dokažte, že platí, nebo opravte tak, aby tvrzení platilo) :

   a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|$, ($a \in R$);

   b) $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ a $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a \iff \lim_{n\to\infty} a_n = a$ ($a \in R$).

4. Nechť $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ a $b_n = (-1)^n a_n$. Vyšetřete existenci $\lim_{n\to\infty} b_n$.

A dobrovolně můžete zkusit:

5*. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a \in (1,\infty)$ (lze už odtud snadno ukázat, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ i pro $a \in (0,1)$?).

   a obecněji

   Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $a > 0$, pak je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. (A zvažte, zda tvrzení platí i pro $a = 0$ $(a_n > 0)$.

   A užití : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n}$.

6*. a) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$ je rostoucí a shora omezená $(a_n \le 2)$.

nebo

   b) Ukažte, že rekurentně definovaná posloupnost $\{a_n\}$, kde $a_1 = 10$, $a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n}$ je klesající a zdola omezená $(a_n \ge 5)$